شادروان دکتر غلامرضا یاسی‌پور

درماندگی آرایشگر راسل

ای ز غیرت بر سبو سنگی زده
و آن سبو ز اشکست کامل‌تر شده
خم شکسته آب از او ناریخته
صد درستی زین شکست انگیخته

(مثنوی معنوی/ دفتر اول/ ۷- ۲۸۶۶)

در اوایل قرن بیستم، پس از کشف «پارادوکس **راسل**»[۱]، پژوهش برای یافتن جایگزینی در «نظریهٔ مجموعه‌های اکسیوماتیک»[۲]، به‌عنوان اساس کل ریاضیات، آغاز شد. کوشش مزبور در سال ۱۹۲۲ با کشف «نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرینکل»[۳]، گرچه نه بدون به جا گذاشتن موارد بی‌اساسی چون «اکسیوم انتخاب»[۴] و «فرض پیوستار»[۵]، به بار نشست.

در سال ۱۸۷۴، **ژرژ کانتور** مقاله‌ای را انتشار داد که طی آن اظهار کرده بود: عددهای طبیعی[۶]، N، و عددهای حقیقی[۷]، R، باید اصلیت‌های متفاوت داشته باشند. یعنی، هیچ‌گاه نمی‌توان تناظری یک‌به‌یک بینشان برقرار کرد. درواقع نشان داد که حتی تعداد عددهای حقیقی بین ۰ و ۱، از تعداد کل N بیشتر است.

مقالهٔ ۱۸۹۱ کانتور، اثبات جدید و به نحوی قانع‌کننده و ماهرانهٔ همین مطلب بود؛ دستاوردی کلاسیک که امروزه به‌عنوان «استدلال قطری کانتور»[۸] معروف است.

اثبات کانتور در مورد «ناشمارا»[۹] بودن عددهای حقیقی، دنیای نامتناهی را به دو نوع نامتناهی تقسیم کرد: مجموعه‌های «شمارا»[۱۰] که می‌توانند در تناظری یک‌به‌یک با عددهای طبیعی قرار داده شوند، و مجموعه‌های ناشمارا که نمی‌توانند.

تقابل مجموعه‌های شمارا و ناشمارای کانتور، دستاوردهای عمیقی برای روند کلی ریاضیات در بر داشت. در آغاز، وی نشان داد که عددهای حقیقی ناشمارا و «عددهای گویا»[۱۱] شمارا هستند. این موضوع باید این نتیجه را داشته باشد که به‌طور ناشمارا، بی‌نهایت «عدد گنگ»[۱۲] در فاصله‌های بین عددهای گویا موجود است. در این صورت، به مفهوم بسیار دقیق‌تر، تقریباً جمیع عددهای حقیقی گنگ‌اند. کانتور این خط فکری را در بررسی عددهای حتی بغرنج‌تر «متعالی»[۱۳] نیز به کار برد. اما در اینجا نیز کار را متوقف نکرد. قضیهٔ سال ۱۸۹۱ کانتور، نامتناهی را بار دیگر تقسیم کرد. زیرا در شوک دوم، نشان داد که

فقط یک سطح نامتناهی ناشمارا موجود نیست، بلکه بی‌نهایت سطح وجود دارد. بسیاری از آن‌ها نام‌هایی دارند که توسط «عددهای اصلی»[14] داده شده‌اند. ابزاری که کانتور در این مرحله به کار برد، مفهوم «مجموعهٔ توانی»[15] بود.

وی با استدلالی کوتاه (که صورتش پارادوکس راسل را پیش‌گویی می‌کرد)، ثابت کرد که هیچ‌گاه نمی‌تواند تناظری یک‌به‌یک بین هر مجموعه و مجموعهٔ توانی‌اش برقرار باشد.

در سال ۱۹۰۱، به نظر می‌رسید که **برتراند راسل**، ریاضی‌دان و فیلسوف انگلیسی، با چند کلمهٔ مختصر، ناقوس مرگ نظریهٔ مجموعه‌ها را که در سال‌های پس از قضیهٔ کانتور، شکوفه کرده بود، به صدا درآورده است. اگر مجموعه، گردایه‌ای از اشیا باشد، به‌نظر می‌رسد که مجموعهٔ جمیع مجموعه‌ها کاملاً معنی‌دار است. اما از این گذشته، این مجموعهٔ خاص باید بنا به تعریف شامل خودش به‌عنوان یک عضو باشد. این موضوع مشخص می‌کند که بعضی مجموعه‌ها شامل خودشان به‌عنوان عضوند، در حالی که بقیه نیستند.

حرکت ویرانگر راسل، تعریف یک مجموعهٔ X بود. یعنی، مجموعهٔ دقیقاً مجموعه‌هایی که به‌عنوان عضو، شامل خودشان نیستند. در این صورت پارادوکس حاصل این است: آیا X عضو خودش است؟ در این مورد هر یک از دو فرض، یعنی اینکه X عضو خودش باشد یا نباشد، به تناقض می‌انجامد.

اما آرایشگر راسل کیست و درماندگی‌اش از چیست؟

پارادوکس‌های آرایشگر و کتابدار، مشابه‌های دنیای حقیقی پارادوکس راسل‌اند، و «پارادوکس گریلینگ»[16] این استدلال را در زبان‌شناسی منتقل کرده است.

«پارادوکس آرایشگر»[17]، همان‌گونه که اشاره کردیم، ترجمهٔ راسل از حوزهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها در دنیای واقعی است. این پارادوکس توسط راسل در بحث مربوط به اثرش به‌کار رفته است. صورت پارادوکس چنین است:

دهکده‌ای است که در آن آرایشگری زندگی می‌کند. او صورت بعضی از مردان دهکده را اصلاح می‌کند. دقیق‌تر، او صورت جمیع مردانی را اصلاح می‌کند که خودشان صورتشان را اصلاح نمی‌کنند (و تنها این مردان را). پرسش غیرقابل‌پاسخ این است: چه کسی صورت آرایشگر را اصلاح می‌کند؟

***

زمانی، **دیوید هیلبرت**، ریاضی‌دان بانفوذ آلمانی، اعلام کرده بود که: «هیچ‌کس نمی‌تواند ما را از بهشتی که کانتور آفریده اخراج کند.» اما پارادوکس راسل مشخص کرد که نظریهٔ مجموعه‌های آن زمان، شامل پارادوکس‌های خطرناک است. آیا این موضوع، عددهای اصلی را به‌طور کلی در هم می‌کوبد؟ در این مورد، آنچه که نیاز بود، زمینهٔ منطقی امنی برای نظریهٔ مجموعه‌ها بود، که به جای ایدهٔ غیر صوری یک مجموعه، به‌عنوان «گردایه‌ای از اشیا» قرار گیرد.

در این صورت با این زمینه، نظریهٔ مجموعه‌ها، خود می‌توانست به عنوان بنیانی برای کل ریاضیات عمل کند، و به‌گونه‌ای اطمینان‌بخش دستگاه عددهای اصلی کانتور را در خود جا دهد.

در این مورد، دو رقیب اصلی برای این نقش ظاهر شدند: نظریهٔ انواع «اصول ریاضیات»[18] راسل و **وایتهد** (که بین سال‌های ۱۹۱۰ و ۱۹۱۳ انتشار یافت)، و در دهۀ ۱۹۲۰، اکسیوم‌های نظریهٔ مجموعه‌های **زرملو-فرینکل**.

به این ترتیب، سنگی که راسل به سبوی مجموعه‌ها زد، جمعشان را پریشان نکرد. زیرا توسط زرملو و فرینکل سبویی رویین ساخت که ظاهراً شکست‌ناپذیر به نظر می‌رسد.

نظریهٔ مجموعه‌های زرملو-فرینکل (یا ZF) وجود «مجموعهٔ تهی»[19] را بدیهی در نظر می‌گرفت، و فرایند در نظر گرفتن مجموعه‌های توانی نیز اجتماع و اشتراک را اکسیوماتیک می‌کرد. بدین‌ترتیب، همه‌چیز در این کیهان یک مجموعه است. یعنی آن‌ها دیگر از اشیای اساسی‌تر ساخته نشده‌اند. بنابراین، مجموعه‌ها ممکن است شامل مجموعه‌های دیگری باشند، اما این‌طور نیست که هر گردایه‌ای از مجموعه‌ها خود را به‌عنوان مجموعه به حساب بیاورد. به‌خصوص، گردایهٔ جمیع مجموعه‌ها یک مجموعه نیست، و هیچ مجموعه‌ای مجاز نیست که شامل خودش باشد. به این ترتیب است که از پارادوکس راسل اجتناب می‌شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Russell's paradox
2. axiomatic set theory
3. Zermelo- Fraenkel set theory
4. Axiom of choice
5. continuum hypothesis
6. natural numbers
7. real numbers
8. Cantor's diagonal argument
9. uncountable
10. countable
11. rational numbers
12. irrational numbers
13. transcendental
14. cardinal numbers
15. power set
16. Grelling's paradox
17. barber paradox
18. principia mathematica
19. empty set